

Eine Einführung in Model Predictive Control

Haftungsausschluss

Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität der bereitgestellten Informationen. Haftungsansprüche gegen den Autor, welche sich auf Schäden materieller oder ideeller Art beziehen, die durch die Nutzung oder Nichtnutzung der dargebotenen Informationen bzw. durch die Nutzung fehlerhafter und unvollständiger Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Revisionen

Revision	Datum	Autor	Kommentare
1.0	2 Juni 2009	H. Musch	

Anmerkung

Diese Arbeit ist im Wesentlichen während der Forschungstätigkeit des Autors am Institut für Mess- und Regeltechnik, ETH Zürich, entstanden.

Einleitung

“Model Predictive Control” (MPC) ist eine Technik, welche auf der on-line Optimierung von quadratischen Gütekriterien beruht. Im Gegensatz zu PID- oder Zustandsreglern wird bei diesen Verfahren das Regelgesetz nicht explizit formuliert, sondern lediglich ein Gütefunktional vorgegeben. Das Verhalten des Reglers ergibt sich aus der On-line-Minimierung dieses Gütefunktionals im Zeitbereich und wird damit nur implizit definiert. Dies hat den grossen Vorteil, dass Beschränkungen der Stell- und anderer Systemgrössen direkt berücksichtigt werden können. Ein Nachteil ist jedoch der recht hohe On-line-Rechenbedarf, welcher die Anwendung dieses Verfahrens bei schnellen Regelstrecken erschwert. Diese Limitierung kann mit expliziten Verfahren (Bemporad et. al) überwunden werden.

MPC wurde in der Industrie besonders für jene multivariablen Regelstrecken entwickelt, bei denen ein Betrieb häufig an Prozessschranken erfolgt. Dieses Regelverfahren hat sich sehr bewährt und wird routinemässig eingesetzt.

Eine weit verbreitete Variante von MPC stellt der “Dynamic Matrix Control” (DMC) genannte Algorithmus dar. Seine einfache Form und Realisierung machen ihn für eine Einführung in dieses Gebiet besonders geeignet. Im folgenden wird daher der DMC-Algorithmus eingeführt und anhand von Beispielen vertieft.

1 Grundlegende Ideen

1.1 Streckenmodell

Bereits die Bezeichnung “Model Predictive Control” weist darauf hin, dass diese Regelverfahren auf Prozessmodellen beruhen. Ein besonders einfaches Prozessmodell erhält man aus einer Sprungantwort des Stellverhaltens mit $\Delta u=1$:

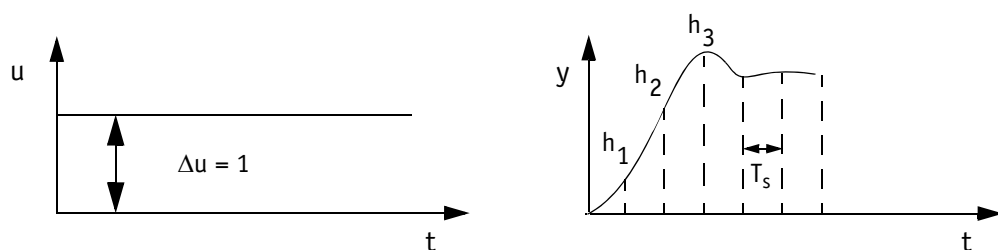


Abbildung 1: Stellverhalten eines Systems

Tastet man den Ausgang mit einer Periode von T_s ab, erhält man die Sprungantwortskoeffizienten h_i .

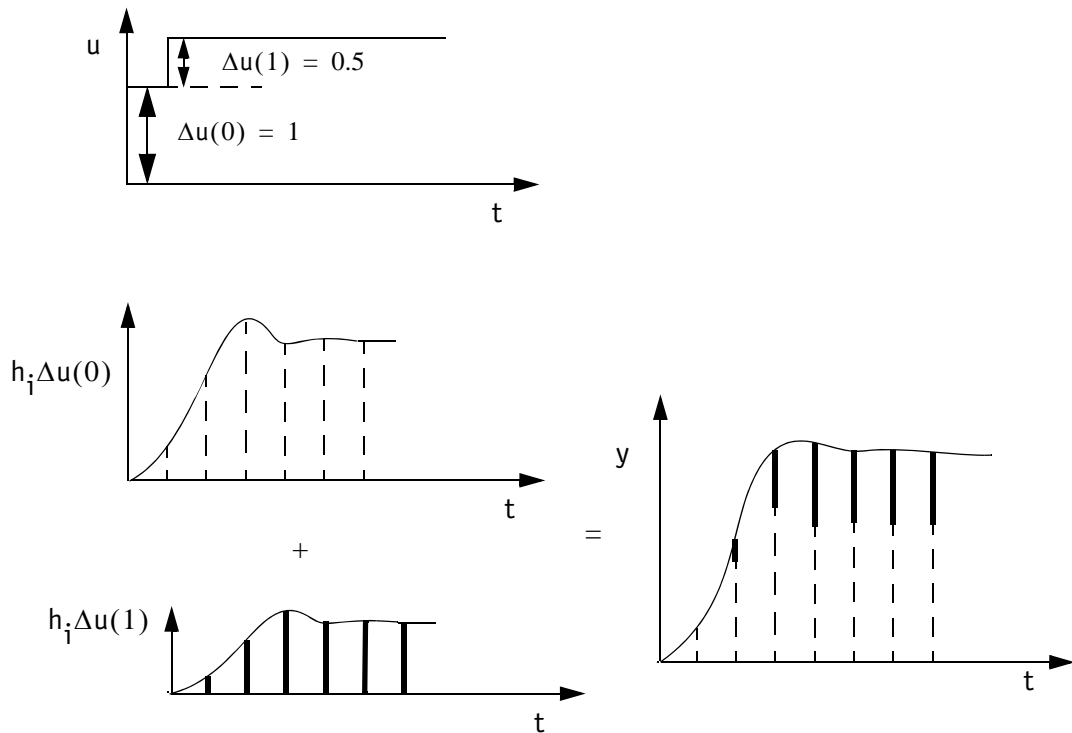


Abbildung 2: Superposition von zwei Sprüngen am Eingang der Regelstrecke

Nehmen wir nun an, dass an der Stellgröße ein zweiter Sprung $\Delta u(1)$ zum Zeitpunkt $t = 1T_s$ angelegt wird. Unter Anwendung des Superpositionsprinzips gilt für den Ausgang (siehe auch Abbildung 2)

$$\begin{aligned}
 t = 0 & & y(0) &= 0 \\
 t = T_s & & y(1) &= h_1 \Delta u(0) \\
 t = 2T_s & & y(2) &= h_2 \Delta u(0) + h_1 \Delta u(1) \\
 t = 3T_s & & y(3) &= h_3 \Delta u(0) + h_2 \Delta u(1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Das Prinzip der Superposition kann auf beliebig viele Änderungen der Stellgröße und einen beliebig grossen Zeithorizont erweitert werden. Es impliziert jedoch ein lineares Modell der Regelstrecke. Betrachtet man einen Stellhorizont von N_u , einen Ausgangshorizont von N_y Abtastschritten und geht von einem beliebigen Zeitpunkt kT_s aus, lässt sich dieser Zusammenhang in Matrizen-Notation darstellen:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ y(k+3) \\ \dots \\ y(k+N_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N_y} & h_{N_y-1} & h_{N_y-2} & \dots & h_{N_y+1-N_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \dots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

oder

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\Delta\mathbf{u} \quad (3)$$

Eine Alternative für diese Darstellung ist die folgende Summenformel:

$$y(k+j) = \sum_{i=\max(1, j-N_u+1)}^j h_i \Delta u(k+j-i) \quad \forall j \leq N_y \quad (4)$$

Die etwas komplizierte untere Grenze für den Summations-Index i verhindert die Mitberücksichtigung von nicht vorhandenen Stelländerungen für $j-i > N_u - 1$.

1.2 Open-loop response

In Gleichung (2) wurde davon ausgegangen, dass vor dem Zeitpunkt $t = kT_s$ keine Änderungen an der Stellgröße vorgenommen wurden. Diese Annahme ist nicht gerechtfertigt, da in einem Regelkreis zu jedem beliebigen Zeitpunkt Stelländerungen notwendig sein können.

Daher wird sich die Ausgangsgröße auf Grund der Stelländerungen in der Vergangenheit $k-1, k-2, \dots$ ändern, auch wenn ab dem aktuellen Zeitpunkt kT_s keinerlei Korrekturen an der Stellgröße mehr vorgenommen würden. Die Wirkung der vergangenen Stelländerungen muss daher bei der Berechnung von $y(k+j)$ unbedingt berücksichtigt werden.

Falls in den vergangenen N_y Abtastschritten auch N_y Stelländerungen erfolgt sind und keine anderen Einflüsse auf den Prozess gewirkt haben und wirken werden (d.h. $\Delta u(k+j) = 0 \quad \forall j \geq 0$), dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k+j) &= \sum_{i=1+j}^{N_y+j} h_i \Delta u(k+j-i) \\ &= \sum_{i=1}^{N_y} h_{i+j} \Delta u(k-i) \end{aligned} \quad \text{mit } h_{i+j} = h_{N_y} \quad \forall i+j > N_y \quad (5)$$

Da dies der Ausgangsgröße ohne Regelung entspricht, wird \tilde{y} häufig als "Open-loop response" oder "freie Antwort" bezeichnet.

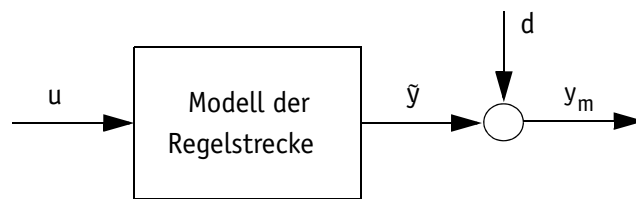


Abbildung 3: Störmodell

1.3 Störgröße

Noch nicht in Betracht gezogen wurde die aktuelle Messgröße $y_m(k)$. Da immer Störungen auf die Regelstrecke wirken und das lineare Sprungantwort-Modell keine perfekte Beschreibung des Prozesses sein kann, wird die Messgröße $y_m(k)$ von $\tilde{y}(k)$ abweichen:

$$y_m(k) - \tilde{y}(k) = d(k) \quad (6)$$

Diese Abweichung entspricht einer Störung am Ausgang der Regelstrecke (siehe Abbildung 3).

Da keine weiteren Informationen über den Verlauf der Störung vorliegen, ist die aktuelle Störung auch die beste Schätzung für die zukünftigen Störungen:

$$d(k+j) = d(k) \quad \forall j > 0 \quad (7)$$

Diese Kenntnis kann dazu eingesetzt werden, die Vorhersage von y zu verbessern.

1.4 Prädiktion des Verlaufs der Ausgangsgröße

Die Prädiktion $\hat{y}(k+j)$ der Ausgangsgröße in Abhängigkeit von

- den zukünftigen Stellgrößen $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots$,
- den vergangenen Stellgrößen $\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots$ und
- der Störung $d(k)$

kann als Summe der drei Teilbeiträge berechnet werden

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) &= y(k+j) \\ &+ \tilde{y}(k+j) \\ &+ d(k) \end{aligned} \quad (8)$$

oder eingesetzt für $1 \leq j \leq N_y$:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+j) = & \sum_{i=\max(1, j-N_u+1)}^j h_i \Delta u(k+j-i) && \text{“Zukunft”} \\
& + \sum_{i=1}^{N_y} h_{i+j} \Delta u(k-i) && \text{“Vergangenheit”} \\
& + y_m(k) - \sum_{i=1}^{N_y} h_i \Delta u(k-i) && \text{“Korrektur”}
\end{aligned} \tag{9}$$

Die beiden letzten Terme können in den Koeffizienten p_j zusammengefasst werden

$$p_j = y_m(k) + \sum_{i=1}^{N_y} (h_{j+i} - h_i) \Delta u(k-i) \tag{10}$$

und damit Gleichung (9) wie folgt vereinfacht werden:

$$\hat{y}(k+j) = \sum_{i=\max(1, j-N_u+1)}^j [h_i \Delta u(k+j-i)] + p_j \tag{11}$$

Eine noch einfachere Form erhält man mit der Matrixschreibweise

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k) + \mathbf{p} \tag{12}$$

und den Vektoren

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \dots \\ \hat{y}(k+N_y) \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \dots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{N_y} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

wobei hier die Stelländerungen $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots$, welche beim Abtastschritt k prädiziert wurden, im Vektor $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k)$ zusammengefasst werden. Die Berechnung von $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k)$ wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

2 Das Gütefunktional

Das Regelziel ist eine möglichst gute Übereinstimmung der Soll- und Istwerte. Im Zeitbereich kann eine Regelgüte z.B. durch die Summe der Regelfehler-Quadrate beurteilt werden. Ausgehend vom aktuellen Abtastschritt k kann man über einen Zeithorizont von N_y Abtast-

schritten in die Zukunft schauen und diejenigen Stellgrößen berechnen, welche die Quadratsumme der Differenz zwischen prädiziertem Ausgang \hat{y} und dem Sollwert r minimieren:

$$J = \sum_{j=1}^{N_y} [\hat{y}(k+j) - r(k+j)]^2 \quad (14)$$

Damit jedoch der Verlauf der Stellgröße nicht allzu nervös wird und eine genügende Robustheit erzielt wird, müssen auch die Änderungen der Stellgröße von Abtastschritt zu Abtastschritt berücksichtigt werden. Aus diesem Grund wird ein Gütefunktional verwendet, welches aus der Quadratsumme der Regelfehler und der mit λ^2 gewichteten Quadratsumme der Stellgrößenänderungen besteht:

$$J = \sum_{j=1}^{N_y} [\hat{y}(k+j) - r(k+j)]^2 + \sum_{j=0}^{N_u-1} [\lambda \Delta u(k+j)]^2 \quad (15)$$

In dieser Gleichung ist $\hat{y}(k+j)$ die Prädiktion der Ausgangsgröße, ausgehend vom aktuellen Zeitpunkt kT_s bis zum Punkt $(k+N_y)T_s$ in die Zukunft. Dieser prädizierte Verlauf \hat{y} kann durch die Stelländerungen $\Delta u(k+j)$ beeinflusst werden, wobei die erste Stelländerung zum aktuellen Zeitpunkt k erfolgt, die Prädiktion aber erst ab dem Abtastschritt $k+1$ von Interesse ist. Der Parameter N_y gibt den betrachteten Ausgangshorizont, der Parameter N_u den Stellhorizont an. Der Stellhorizont kann durchaus kleiner als der Regelhorizont gewählt werden, wobei $\Delta u(k+j) = 0$ für $j \geq N_u$ angenommen wird¹.

Das Lösungsverhalten kann mit dem Faktor λ beeinflusst werden. Grosse λ -Werte legen Gewicht auf kleine Stelländerungen, kleine λ -Werte dagegen auf möglichst kleine Regelfehler.

3 Minimierung ohne Begrenzungen der Stellgrößen

Setzt man die Prädiktions-Gleichung (12) in das Gütefunktional ein, erhält man

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=1}^{N_y} [\hat{y}(k+j) - r(k+j)]^2 + \sum_{j=0}^{N_u-1} [\lambda \Delta u(k+j)]^2 \\ &= [\mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p(k) + \mathbf{p} - \mathbf{r}]^T [\mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p(k) + \mathbf{p} - \mathbf{r}] + \lambda \Delta \mathbf{u}_p(k)^T \lambda \Delta \mathbf{u}_p(k) \\ &= \Delta \mathbf{u}_p(k)^T [\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u}_p(k) + 2(\mathbf{p} - \mathbf{r})^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p(k) + (\mathbf{p} - \mathbf{r})^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (16)$$

Dieses Gütefunktional ist minimal, falls

1. **Anmerkung:** Nicht zulässig ist $N_u > N_y$, da in diesem Fall das Problem singulär wird.

$$\frac{dJ}{d\Delta\mathbf{u}_p} = 2[\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda^2\mathbf{I}]\Delta\mathbf{u}_p + 2\mathbf{H}^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}) = 0 \quad (17)$$

Löst man die Gleichung nach $\Delta\mathbf{u}_p$ auf, erhält man:

$$\Delta\mathbf{u}_p = [\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \quad (18)$$

Der optimale zukünftige Verlauf der Stellgröße kann dementsprechend mittels einer einfachen Multiplikation einer konstanten Matrix $[\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{H}^T$ mit dem prädiktierten Regelfehler $(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ berechnet werden. Voraussetzung dafür ist jedoch, dass die Stellgröße oder Regelgröße keinen Schranken unterliegt.

4 Das “Moving-horizon“-Konzept

An diesem Punkt der Betrachtung sind wir in der Lage, für einen beliebigen Abtastschritt k den optimalen und in die Zukunft extrapolierten Verlauf der Stellgröße $\Delta\mathbf{u}_p(k)$ zu berechnen. Es stellt sich nun die Frage, wie mit Hilfe dieser Open-loop-Lösung ein Regelkreis aufgebaut werden kann.

Bei MPC geschieht das Schliessen des Regelkreises durch die Wiederholung der Optimierung für jeden einzelnen Abtastschritt. Vom berechneten Vektor $\Delta\mathbf{u}_p(k)$ wird jeweils nur das erste Element $\Delta u_p(k)_1$ berücksichtigt und die Stellgröße mit $u(k) = u(k-1) + \Delta u_p(k)_1$ korrigiert (Abbildung 4). Eine Rückführung der Regelgröße entsteht dabei durch die Berechnung des Korrektur-Terms in Gleichung (9). Mit Hilfe dieser Korrektur wird der prädiktierte Ausgangsverlauf mit der aktuellen Messgröße in Einklang gebracht.

Da bei diesem Vorgehen ein Zeithorizont fester Länge um jeweils die Abtastzeit T_s verschoben wird, spricht man auch von einem “Moving horizon”¹.

5 Ein Beispiel

Für den Wärmetauscher wurde in Kapitel 4.2 (Fig. 4.10) eine Sprungantwort des Stellverhaltens wiedergegeben. Tastet man die Sprungantwort mit $T_s = 30$ s ab und normiert diese mit der Sprunghöhe von $\Delta u = -0.1$ kg/s, erhält man die in Abbildung 5 dargestellten Koeffizienten h_i .

1. **Anmerkung:** Diesem Konzept liegt die Annahme zugrunde, dass die Berechnung von $\Delta\mathbf{u}_p$ schnell erfolgt, da eine Totzeit zwischen der Abtastung und der Ausgabe der neuen Stellgröße u nicht vorgesehen wurde. Mindestens im hier betrachteten Fall der Regelung ohne Schranken ist diese Annahme gerechtfertigt, da für die Berechnung des ersten Elements von $\Delta\mathbf{u}_p$ lediglich ein Skalar-Produkt der ersten Zeile der konstanten Matrix $[\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{H}^T$ mit dem prädiktierten Regelfehler $(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ gebildet werden muss.

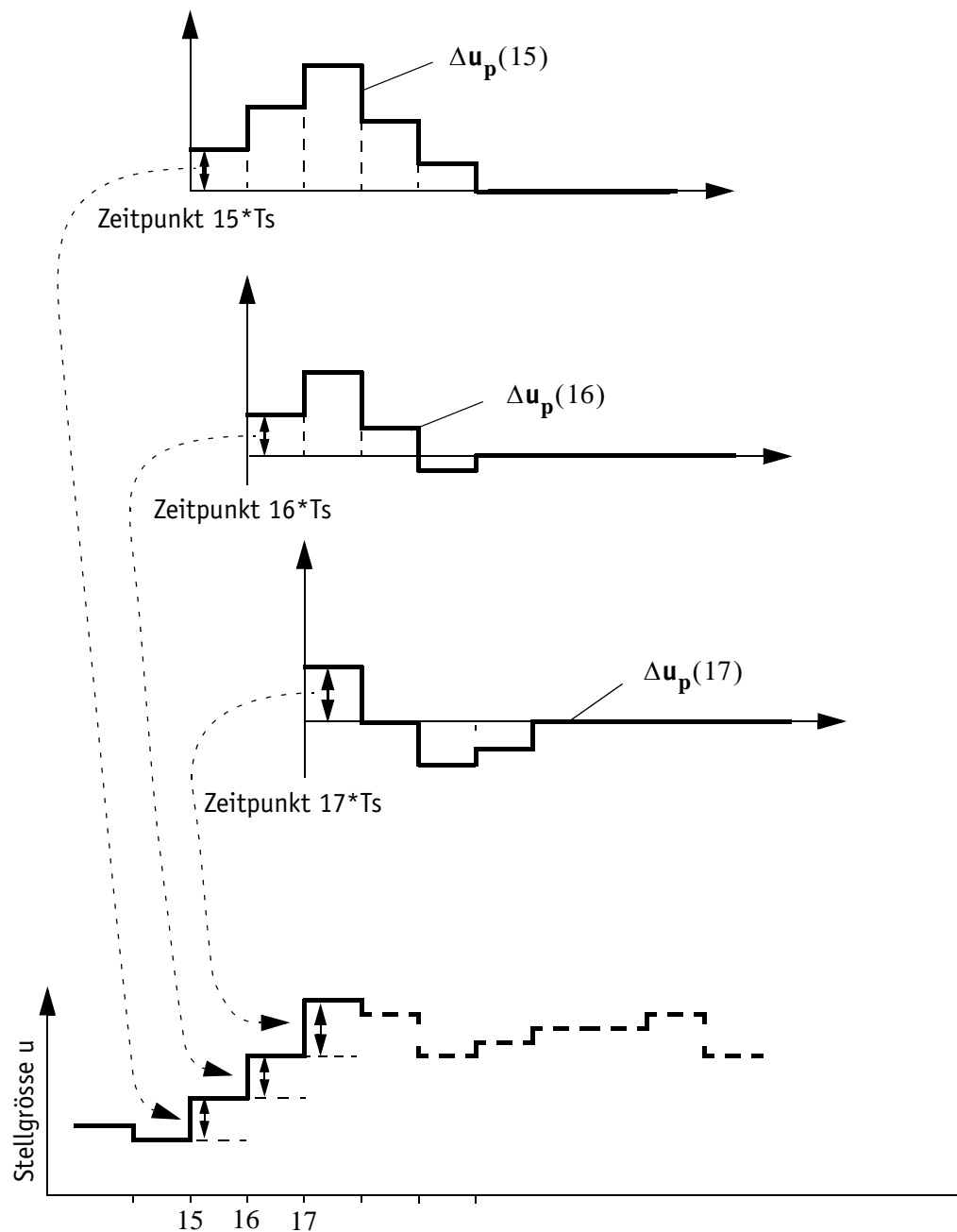


Abbildung 4: Das "Moving-Horizon"-Konzept

Da das System nach ca. 1200 s praktisch vollständig zur Ruhe gekommen ist, wurde ein grosszügiger Prädiktionshorizont von $N_y = 40$ gewählt. Der Stellhorizont wurde etwas kürzer mit $N_u = 30$ angesetzt, was den Rechenaufwand reduziert und die Robustheit der Regelung erhöht.

Bei quadratischen Problemen hat die Skalierung einen grossen Einfluss auf das Verhalten des Regelkreises. Um den Tuning-Faktor λ möglichst unabhängig von der statischen Streckenverstärkung zu machen, ist es daher zweckmässig, die Regelstrecke so zu skalieren, dass

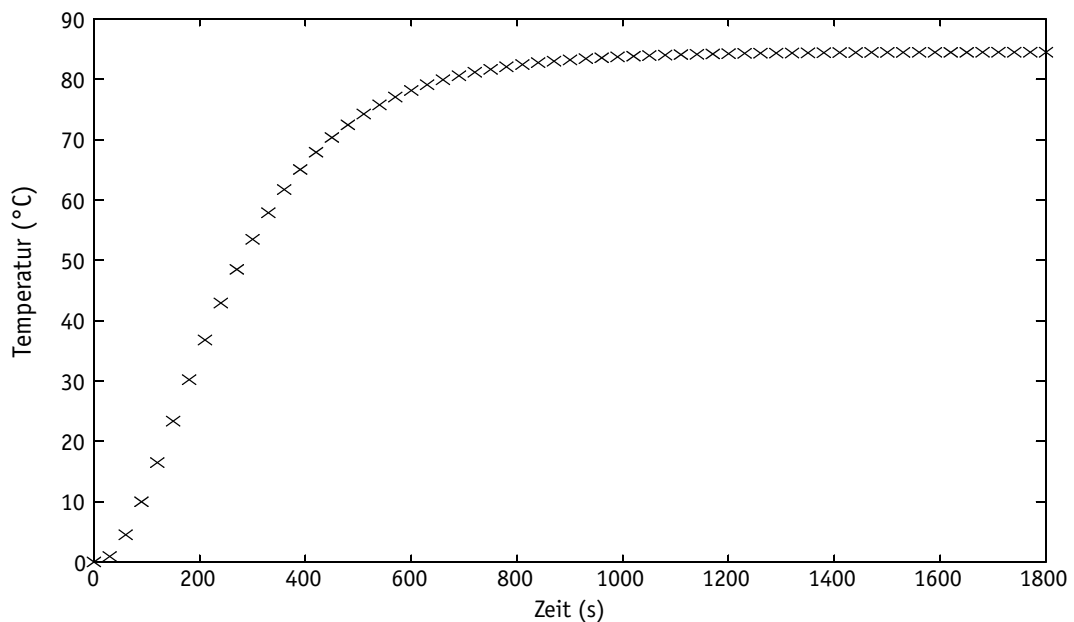


Abbildung 5: Einheits-Sprungantwort des Wärmetauschers (Stellverhalten)

diese eine Verstärkung von ca. 1 aufweist. Dementsprechend wurde das Sprungantwortmodell innerhalb des DMC-Algorithmus mit einem Faktor 0.01 skaliert.

Das Störverhalten des Regelkreises bei einer sprunghaften Änderung des Zulaufs um -0.1 kg/s bei $t = 300 \text{ s}$ wird in Abbildung 6 gezeigt. Für kleine λ -Werte reagiert der Regler schneller und nervöser als bei einer grossen Gewichtung der Stellgrößenänderungen.

Eine besondere Eigenschaft aller MPC-Regelungen wird in Abbildung 7 demonstriert. Falls der Verlauf des Sollwerts im *voraus* bekannt ist, kann der Regler aufgrund der Prädiktion bereits vor der eigentlichen Sollwertänderung eingreifen und damit die Verzögerung der Regelstrecke weitgehend kompensieren.

6 Regelung mit Begrenzungen der Stellgrößen

Typischerweise unterliegen die Stellgrößen gewissen Schranken wie z.B. einer Ventilöffnung von 0-100%. Falls diese Schranken während der Regelung berücksichtigt werden sollen, muss das Gütekriterium

$$J = \Delta \mathbf{u}_p(k)^T [\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u}_p + 2(\mathbf{p} - \mathbf{r})^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p(k) + (\mathbf{p} - \mathbf{r})^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}) \quad (19)$$

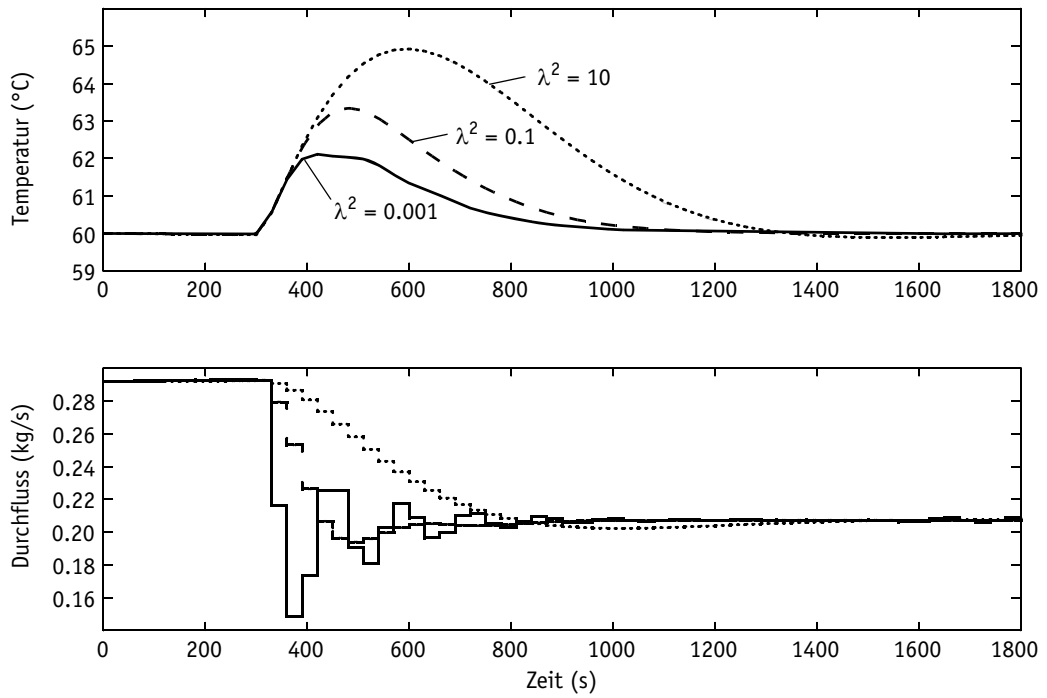


Abbildung 6: Störverhalten des DMC-geregelten Wärmetauschers

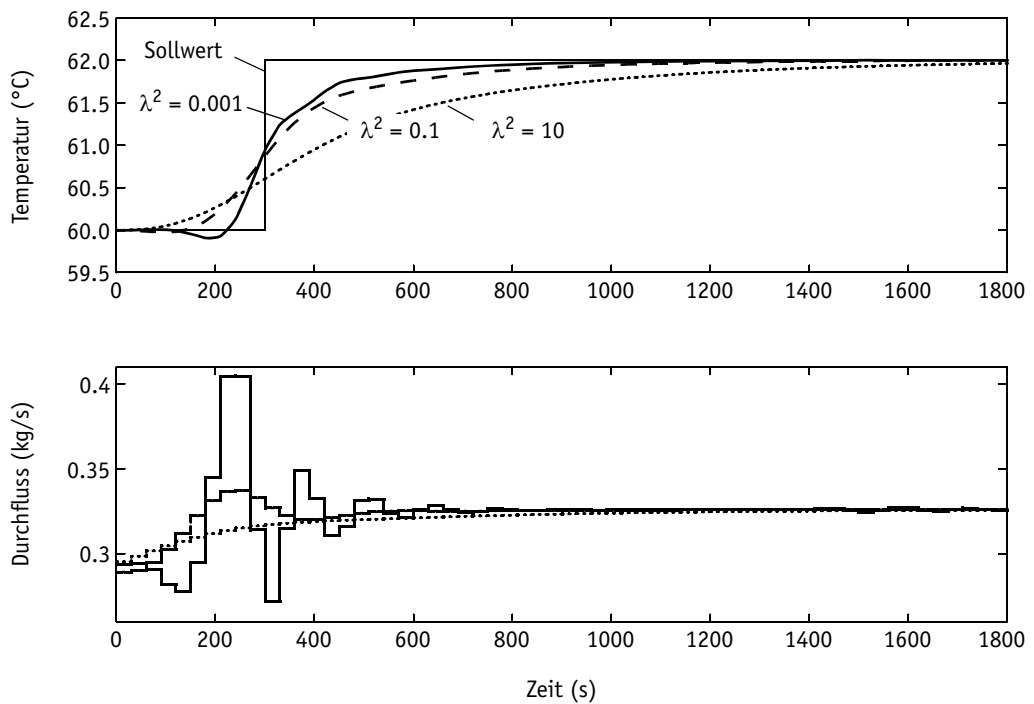


Abbildung 7: Führungsverhalten des DMC-geregelten Wärmetauschers

on-line mit einer numerischen Optimierung minimiert werden. Da die Lage des Optimums nicht von der Konstanten $(\mathbf{p} - \mathbf{r})^T (\mathbf{p} - \mathbf{r})$ abhängt, wird das Problem vorteilhaft auf folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k) = \arg \min [\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k)^T \mathbf{F} \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k) + 2\mathbf{f} \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k)] \\ \text{subject to } \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}(k) < \mathbf{l} \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{I} & \mathbf{f} &= \mathbf{H}^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}) \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} & \mathbf{l} &= \begin{bmatrix} u_{\max} - u(k-1) \\ u_{\max} - u(k-1) \\ u_{\max} - u(k-1) \\ \dots \\ u_{\max} - u(k-1) \\ -[u_{\min} - u(k-1)] \\ -[u_{\min} - u(k-1)] \\ -[u_{\min} - u(k-1)] \\ \dots \\ -[u_{\min} - u(k-1)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Matrix \mathbf{R} und den Vektor \mathbf{l} erhält man aus der Forderung, dass die Summe aller Stelländerungen die Stellgrenzen nicht überschreiten darf:

$$\begin{aligned} j = 0: & \quad u_{\min} < u(k-1) + \Delta u(k) < u_{\max} \\ j = 1: & \quad u_{\min} < u(k-1) + \Delta u(k) + \Delta u(k+1) < u_{\max} \\ j = 2: & \quad u_{\min} < u(k-1) + \Delta u(k) + \Delta u(k+1) + \Delta u(k+2) < u_{\max} \end{aligned} \quad (22)$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N_u-1} \Delta u(k+j) &< u_{\max} - u(k-1) \\ - \sum_{j=0}^{N_u-1} \Delta u(k+j) &< -(u_{\min} - u(k-1)) \end{aligned} \quad (23)$$

Für die Lösung von quadratischen Problemen stehen ausserordentlich leistungsfähige Algorithmen zur Verfügung. Ein Problem mit 80 Variablen kann auf einem modernen PC in weniger als einer Sekunde gelöst werden.

Das unterschiedliche Verhalten des begrenzten und unbegrenzten DMC-Reglers wird in den Abbildungen 8 und 8 gezeigt. Bei diesen Simulationen wurde bei $t=0s$ der Sollwert auf $20^{\circ}C$ gesenkt und bei $t=900s$ wieder auf $60^{\circ}C$ erhöht. Da im ersten Fall der Regler keine Kenntnis der Stellgrenzen hat, verlangt er Durchflüsse des Heizmediums weit jenseits der Grenzen. Dies hat zur Folge, dass die Prädiktion des Ausgangsverlaufs fehlerhaft wird und verursacht bei der Erhöhung des Sollwerts ein träges und unbefriedigendes Verhalten. Die Berücksichtigung der Stellschranken führt dagegen zu einer korrekten Prädiktion und einem wesentlich besseren Verhalten.

7 Störgrössenaufschaltungung

Aus Kapitel 7.2 ist das Konzept der Störgrössenaufschaltungung bekannt und kann mit geringem Aufwand auch bei einer prädiktiven Regelung angewendet werden. Dazu wird das Modell der Regelstrecke um den messbaren Eingang d_m erweitert:

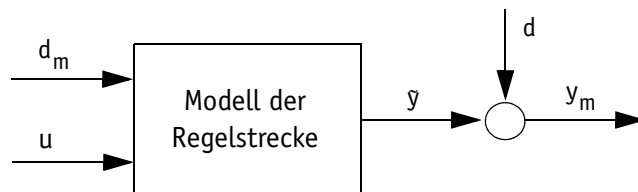


Abbildung 9: Störmodell bei einer messbaren Störgrösse

Bestimmt man die Sprungantwortskoeffizienten g_i für die Wirkung der Störgrösse d_m auf den Ausgang y und wendet das Prinzip der Superposition an, gilt

$$\begin{aligned}
 t = 0 & & y(0) &= 0 \\
 & & & + 0 \\
 t = T_s & & y(1) &= h_1 \Delta u(0) \\
 & & & + g_1 \Delta d_m(0) \\
 t = 2T_s & & y(2) &= h_2 \Delta u(0) + h_1 \Delta u(1) \\
 & & & + g_2 \Delta d_m(0) + g_1 \Delta d_m(1) \\
 t = 3T_s & & y(3) &= h_3 \Delta u(0) + h_2 \Delta u(1) + h_1 \Delta u(2) \\
 & & & + g_3 \Delta d_m(0) + g_2 \Delta d_m(1) + g_1 \Delta d_m(2)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Geht man nun wie früher erläutert von einem beliebigen Abtastschritt k aus und erweitert die Prädiktions-Gleichung (9) mit den Termen für die messbare Störgrösse, erhält man für $1 \leq j \leq N_y$:

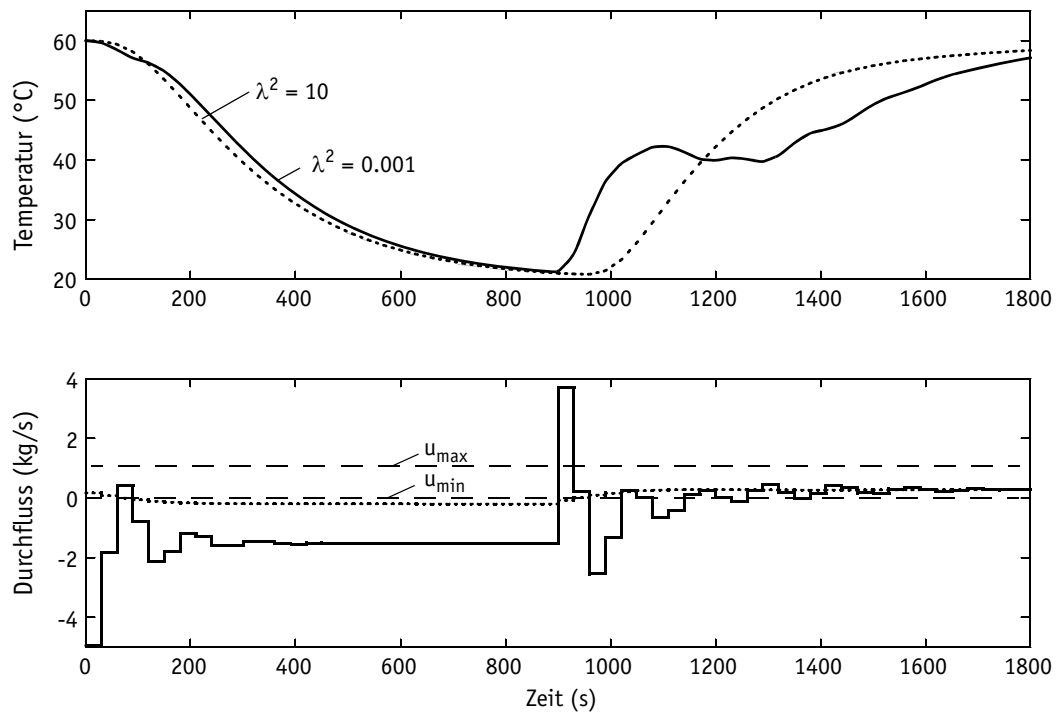


Abbildung 8: Unbegrenzte DMC-Regelung

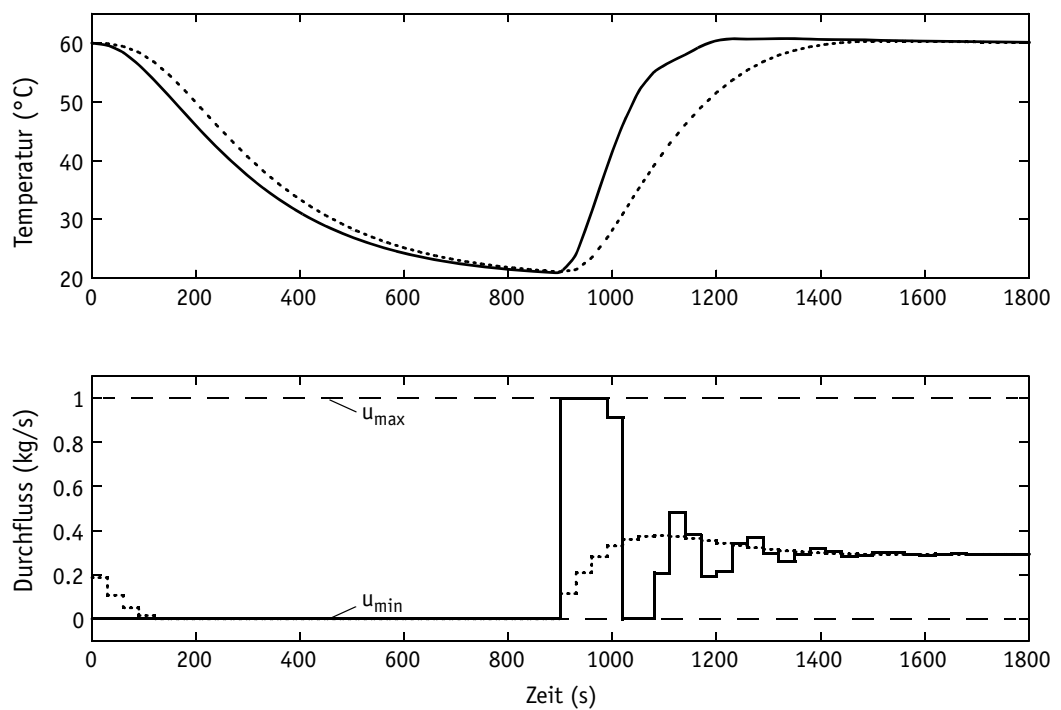


Abbildung 8: Begrenzte DMC-Regelung

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+j) = & \sum_{i=\max(1, j-N_u+1)}^j h_i \Delta u(k+j-i) && \text{“Zukunft”} \\
& + \sum_{i=1}^{N_y} h_{i+j} \Delta u(k-i) + \sum_{i=0}^{N_y} g_{i+j} \Delta d_m(k-i) && \text{“Vergangenheit”} \\
& + y_m(k) - \sum_{i=1}^{N_y} h_i \Delta u(k-i) - \sum_{i=1}^{N_y} g_i \Delta d_m(k-i) && \text{“Korrektur”}
\end{aligned} \quad (25)$$

Bei der Wahl der unteren Grenzen für die Summations-Indices wurde berücksichtigt, dass die Störgrösse zum Zeitpunkt k gemessen werden kann, die Stelländerung $\Delta u(k)$ aber noch berechnet werden muss.

Die letzten beiden Zeilen können wieder zu einer “open-loop-response” $\tilde{\mathbf{p}}$ zusammengefasst werden. Die Prädiktions-Gleichung nimmt damit wieder die bekannte Form (siehe Gleichung 12) an:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p(k) + \tilde{\mathbf{p}} \quad (26)$$

Dementsprechend muss für die Störgrössenaufschaltung lediglich die Berechnung der Open-loop-response $\tilde{\mathbf{p}}$ modifiziert werden. Die Berechnung des Stellverlaufs erfolgt wie bisher.

Die Verbesserungen, welche durch eine Störgrössenaufschaltung erzielt werden können, sind in Abbildung 10 dargestellt. Wie bei Abbildung 6 wurde bei dieser Simulation zum Zeitpunkt $t = 300\text{s}$ der Zulauf um 0.1 kg/s reduziert.

8 Mehrgrößenregelung

Die Mehrgrößenregelung mit dem DMC-Algorithmus ist eine direkte Erweiterung der bisher erläuterten Prinzipien. Auch in diesem Fall wird ein Sprungantwortmodell der Regelstrecke eingesetzt und das quadratische Gütekriterium on-line minimiert.

8.1 Das Streckenmodell

Wenn mehrere Stellgrößen $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(p)}$ auf die Ausgangsgrößen $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(q)}$ wirken und das Prinzip der Superposition angewendet wird, ergibt sich der Verlauf der Ausgangsgrösse aus der Summe der Wirkung jeder einzelnen Stellgrösse auf die jeweilige Ausgangsgrösse:

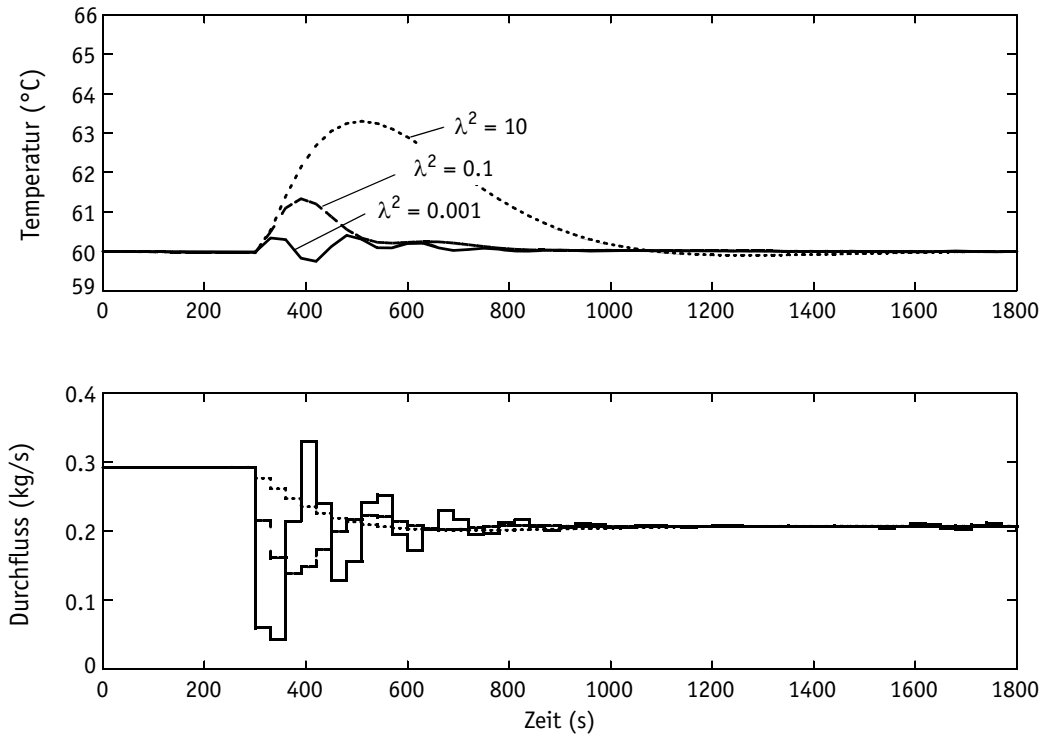


Abbildung 10: Störverhalten des Wärmetauschers mit DMC Regelung einschliesslich Störgrössenaufschaltung

$$\begin{bmatrix} \hat{y}^{(1)}(k) \\ \hat{y}^{(2)}(k) \\ \dots \\ \hat{y}^{(q)}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1,1)} & \mathbf{H}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{H}^{(1,p)} \\ \mathbf{H}^{(2,1)} & \mathbf{H}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{H}^{(2,p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{H}^{(q,1)} & \mathbf{H}^{(q,2)} & \dots & \mathbf{H}^{(q,p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_p^{(1)}(k) \\ \Delta \mathbf{u}_p^{(2)}(k) \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_p^{(p)}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{(1)}(k) \\ \mathbf{p}^{(2)}(k) \\ \dots \\ \mathbf{p}^{(q)}(k) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Jede Matrix $\mathbf{H}^{(a,e)}$ enthält dabei die Sprungantwortskoeffizienten $h_i^{(a,e)}$ für die Wirkung des Eingangs e auf den Ausgang a gemäss Gleichung (2). Die Vektoren $\mathbf{p}^{(a)}$ entsprechen den freien Antworten

$$\mathbf{p}_j^{(a)} = y_m^{(a)}(k) + \sum_{e=1}^p \left(\sum_{i=1}^{N_y} (h_{j+i}^{(a,e)} - h_i^{(a,e)}) \Delta u^{(e)}(k-i) \right) . \quad (28)$$

8.2 Gütekriterium

Die Form des Gütekriteriums entspricht jener in Gleichung (19)

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{u}_p(k)^T [\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u}_p + 2(\mathbf{p} - \mathbf{r})^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p(k) + (\mathbf{p} - \mathbf{r})^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}), \quad (29)$$

wobei aber die Matrizen wie folgt angepasst werden müssen:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{u}_p &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_p^{(1)}(k) \\ \Delta \mathbf{u}_p^{(2)}(k) \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_p^{(p)}(k) \end{bmatrix} & \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1,1)} & \mathbf{H}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{H}^{(1,p)} \\ \mathbf{H}^{(2,1)} & \mathbf{H}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{H}^{(2,p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{H}^{(q,1)} & \mathbf{H}^{(q,2)} & \dots & \mathbf{H}^{(q,p)} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{(1)}(k) \\ \mathbf{r}^{(2)}(k) \\ \dots \\ \mathbf{r}^{(q)}(k) \end{bmatrix} & \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{(1)}(k) \\ \mathbf{p}^{(2)}(k) \\ \dots \\ \mathbf{p}^{(q)}(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Das Gütekriterium kann im unbegrenzten Fall gemäss (18) analytisch gelöst werden.

Literatur

E. F. Camacho and C. Bordons, *Model predictive control in the process industry*, Springer-Verlag, 1995

A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, E. N. Pistikopoulos, *The explicit linear quadratic regulator for constrained systems*, *Automatica* vol. 38 pp. 3-20, 2002